第 1 章　集合及其运算

一、概念

集合（元素）——**集合**是一些具有确定的、可以区分的若干事件的全体，而集合中的事件称为**元素**．因此，集合是由若干元素组成的．若 a 是集合 A 中的元素，则称 a **属于** A，记作 $a \in A$；若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a **不属于** A，记作 $a \notin A$．

定义 1.1.1（子集）　对任意两个集合 A 和 B，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 为 A 的**子集，**记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$.

若 B 是 A 的子集，也称 A 包含 B，或 B 被 A 包含．若 B 不是 A 的子集，即 $B \subseteq A$ 不成立时，记作 $B \not\subseteq A$.

定义 1.1.2（集合相等）　对任意两个集合 A 和 B，若有 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

定义 1.1.3（真子集）　对任意两个集合 A 和 B，若 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$，则称 B 为 A 的**真子集**，记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$.

定义 1.1.4（空集）　不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$．

空集的定义也可以写成

$$\varnothing = \{ x | x \neq x \} \qquad (1.1.1)$$

***n* 元集**（m 元子集）——含有 n 个元素的集合简称 ***n* 元集**，它的含有 m（$m \leq n$）个元素的子集叫做它的 ***m* 元子集**.

定义 1.1.5（全集）　在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则将这个集合称为**全集**，记作 E.

定义 1.1.6（幂集）　设 A 是一个集合，由 A 的所有子集组成的集合，称为 A 的**幂集**，记作 $P(A)$或 2^A ．

定义 1.2.1（并集、交集、差集、补集、对称差）　设 E 为全集，A 和 B 是 E 中任意两个子集.

（1）所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A \cup B$．即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\} \qquad (1.2.1)$$

（2）既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**交集**，记作 $A \cap B$．即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\} \qquad (1.2.2)$$

如果两个集合 A 和 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$，称为集合 A 与 B **不相交**.

（3）属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A - B$．即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \qquad (1.2.3)$$

（4）由 E 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 的**补集**，记作~A．即

$$\sim A = \{x | x \in E \text{ 且 } x \notin A\} \qquad (1.2.4)$$

补集~A 可以看作全集 E 与集合 A 的差集，即 $\sim A = E - A$．

（5）集合 $(A - B) \cup (B - A)$称为集合 A 和 B 的**对称差**，记作 $A \oplus B$．即

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A). \qquad (1.2.5)$$

对称差运算的另一种定义是

$$A \oplus B = (A \cup B) - (B \cap A). \qquad (1.2.5')$$

二、定理与性质

集合包含关系的自反性：　对于任意集合 A，有 $A \subseteq A$.

集合包含关系的反对称性： 对任意两个集合 A 和 B，若有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

集合包含关系的传递性： 对任意三个集合 A，B 和 C，若有 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

定理 1.1.1 空集是一切集合的子集.

定理 1.1.1 的推论 空集是唯一的.

集合运算的交换律：$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

集合运算的结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

集合运算的分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

集合运算的幂等律：$A\cup A=A$

$A\cap A=A$

集合运算的同一律：$A\cup\varnothing=A$

$A\cap E=A$

集合运算的零律：$A\cup E=E$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

集合运算的补余律：$A\cup\sim A=E$

$A\cap\sim A=\varnothing$

集合运算的吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

集合运算的摩根律：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$

$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

$\sim\varnothing=E$

$\sim E=\varnothing$

集合运算的双补律：$\sim(\sim A)=A$

对称差的交换律：$A\oplus B=B\oplus A$

对称差的结合律：$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

对称差的分配律：$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

对称差的同一律：$A\oplus\varnothing=A$

对称差的零律：$A\oplus A=\varnothing$

对称差的性质：$A\oplus(A\oplus B)=B$

定理 1.2.1 对任意两个有限集合 A 和 B，用 $|S|$ 表示有限集合 S 中的元素数，则

(1) $|A\cup B|\le|A|+|B|$； (2) $|A\cap B|\le\min(|A|+|B|)$；

(3) $|A-B|\ge|A|-|B|$； (4) $|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$.

定理 1.2.2（容斥定理） 对任意两个有限集合 A 和 B，有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \tag{1.2.6}$$

其中 $|A|$，$|B|$ 分别表示 A，B 的元素个数.

定理 1.2.2 的推广结论：对于任意三个有限集合 A, B, C，有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \tag{1.2.7}$$

三、方法

1．集合的三种表示方法

列举法是列出集合的所有元素，并用花括号括起来. 例如 $A=\{a,b,c,d\}$，$N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

描述法是将集合中元素的共同属性描述出来．例如 $B=\{x|x^2-1=0$ 且 $x\in R\}$，$D=\{x|x$ 是正整数$\}$．

文氏图法是用一个简单的平面区域表示一个集合，用区域内的点表示集合内的元素．

2．有限集合的计数方法

首先根据已知条件把对应的文氏图画出来，然后将已知集合的元素填入表示该集合的区域内．通常从几个集合的交集填起，根据计算结果将数字逐步填入所有的空白区域内．如果交集的数字是未知的，可以将其设为 x，再根据已知条件列出方程或方程组，解出未知数 x．